スタディサプリ　難関私立大 数学ⅠAⅡBについて

この講座は，難関私立大学における個別試験を受験する生徒を対象に，実際に出題された入試問題を題材に，これまでの学習で培ってきた力をもとに，どのように問題を解きほぐし，アウトプットすべきかを伝授する講座です。

この講座を受けていただく時点でのあなたの実力が，難関私立大学があなたに期待している解法に対して，どこまで到達し，上回り，また下回っているかについて，予習と講義動画を通じて分野別に整理することで，あなたの今後の学習の指針となるでしょう。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講	小問集合，三角比と平面図形	2
第２講	場合の数と確率	5
第３講	微分・積分	8
第４講	ベクトル，数列	11

※授業当日までに，該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから授業に臨んで下さい。
当日の授業は，予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　小問集合，三角比と平面図形

1　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

(1)　$a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき，$a+\dfrac{1}{a}=$ ☐ であり，$a^2+\dfrac{1}{a^2}=$ ☐ である．

(2)　$\sqrt{n^2-8n+1}$ が整数となる整数 n の個数は ☐ 個あり，最も大きい n の値は ☐ である．

(3)　a，b，c を実数の定数とし，$f(x)=x^2-4ax+a$，$g(x)=x^2-bx+c$ とする．2 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの解をもつとし，それらを α，β とおく．また，2 次方程式 $g(x)=0$ は異なる 2 つの解 $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ をもつとする．このとき

$b=$ ☐ $a-$ ☐，　$c=$ ☐

である．さらに $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ がともに純虚数のとき，$a=\dfrac{☐}{☐}$ となり，$f(x)=0$ の解は $\dfrac{☐}{☐}\pm\dfrac{☐}{☐}i$ となる．ただし，i は虚数単位を表す．

2　次の［　　］をうめよ．

[1]　(1)　不等式 $\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{2}}<\cos x$ $(0\leqq x<2\pi)$ を満たす x の値の範囲は［　　］である．

(2)　$\cos x\cos(\pi-x)=\sin 2x$，$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ が成り立つとき，$\sin x=$［　　］である．

[2]　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

x を，$x>0$，$x\neq1$ を満たす実数とする．

不等式 $\log_2\left(\sqrt{2}\,x\right)-\log_{\sqrt{x}}8+2>0$ ………（i）を満たす実数 x の範囲について考える．

$\log_2 x=X$ とおく．$0<x<$［ア］のとき，$X<0$ であり，$x>$［ア］のとき，$X>0$ である．

$\log_2\left(\sqrt{2}\,x\right)=X+\frac{［イ］}{［ウ］}$ であり，$\log_{\sqrt{x}}8=\frac{［エ］}{X}$ である．

$0<x<$［ア］とする．このとき $X<0$ であるから，(i)が成り立つことと

$$X^2+\frac{［オ］}{［カ］}X-［キ］<0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

が成り立つことは同値である．

$X<0$ と(ii)を同時に満たす X の範囲は，［クケ］$<X<$［コ］であり，

$0<x<$［ア］と(i)を同時に満たす x の範囲は，$\frac{［サ］}{［シス］}<x<$［セ］である．

$x>$［ア］と(i)を同時に満たす x の範囲は $x>$［ソ］$\sqrt{［タ］}$ である．

3

[1]　△ABC において，AB＝9，BC＝7，CA＝8 とする．また，△ABC の内接円と辺 BC，辺 CA，辺 AB との接点を，それぞれ D，E，F とする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1)　線分 AE の長さを求めよ．

(2)　線分 EF の長さを求めよ．

(3)　線分 AD の長さを求めよ．

[2]　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

AB＝6，AC＝10，$\cos\angle A=\dfrac{1}{5}$ である △ABC を考える．このとき △ABC の面積を S とすると，$BC=\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$，$S=\boxed{}\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$ である．

A から辺 BC に下ろした垂線を AH とするとき，$AH=\dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}\boxed{}}}{\boxed{}}$ である．

また，線分 AH を直径とする円と AB との交点を P，AC との交点を Q とすると，

$$AP=\frac{\boxed{}\boxed{}}{\boxed{}},\quad AQ=\frac{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}{\boxed{}\boxed{}}$$

である．ただし，点 P，Q は A とは異なるとする．

第2講　場合の数と確率

1

(1)　硬貨が6枚あり，そのうちの4枚が表，残りの2枚が裏の状態で置かれている．

この6枚の硬貨の中から n 枚を無造作に選び，その n 枚を投げる．その結果，6枚の硬貨のうち表と裏が3枚ずつとなる確率を p_n とする．このとき，p_1，p_2，p_6 を求めよ．ただし，硬貨を投げるとき，表と裏はそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で出るものとする．

(2)　n を自然数とする．1から $3n$ までの数字が書かれた $3n$ 枚のカードをよく切って，3枚を順に取り，1枚目，2枚目，3枚目のカードに書かれた数字をそれぞれ a，b，c とする．ただし，取ったカードは戻さない．$a+b+c$ が3の倍数である確率を求めよ．

(3)　さいころを3回続けて投げ，出る目を順に a_1，a_2，a_3 とする．このとき，$a_1-a_2 \geqq 2$ かつ $a_2-a_3 \geqq 1$ となる確率を求めよ．

2　9個の玉があり，それぞれの玉には，自然数1，2，…，9のいずれか1つが書かれている．

また，それぞれの自然数が書かれた玉は1個ずつである．次の問いに答えよ．

(1)　白い袋と赤い袋と青い袋がそれぞれ1つずつあり，9個の玉を，これらの3つの袋に分けて入れるとする．

どの袋にも3個の玉が入るような玉の入れ方は何通りあるか．

(2)　区別のつかない3つの袋があり，9個の玉を，これら3つの袋に分けて入れるとする．

(i)　どの袋にも3個の玉が入るような玉の入れ方は何通りあるか．

(ii)　3つの袋のうち，2つの袋にはそれぞれ2個の玉が，1つの袋には5個の玉が入るような玉の入れ方は何通りあるか．

(iii)　どの袋にも2個以上の玉が入るような玉の入れ方は何通りあるか．

(3)　区別のつかない2つの袋がある．一方の袋には，9個の玉のうち，奇数が書かれている玉のすべてが入っていて，もう一方の袋には，9個の玉のうち，偶数が書かれている玉のすべてが入っている．どちらか一方の袋を選び，選んだ袋の中から2個の玉を同時に取り出す．

(i)　取り出した玉に書かれている自然数がともに奇数で，それらの和が3の倍数である確率を求めよ．

(ii)　取り出した玉に書かれている自然数の和が3の倍数であったとき，それらの自然数がともに奇数である確率を求めよ．

3　次の $\boxed{}$ に適する数または式を求めよ．

k を 3 以上の整数とする．1 から k までの番号を 1 つずつつけた k 個の玉と，同様に番号をつけた k 個の箱を用意する．この k 個の玉を 1 つの袋に入れ，この袋から玉を 1 個ずつ取り出して番号が 1 の箱から順に 1 個ずつすべての箱に入れていく．

このとき，袋から一度取り出した玉は袋に戻さないとする．すべての箱で玉の番号と箱の番号が異なる事象を考える．

この事象の起こる場合の数を $N(k)$ とし，この事象が起こる確率を $P(k)$ とすると，$N(3)=\boxed{}$，$P(3)=\boxed{}$．また，$N(4)=\boxed{}$ であり，

$N(5)=\boxed{}\times(N(4)+N(3))$ であるので，一般の k のときの確率の関係式は

$P(k+2)=\dfrac{k+1}{k+2}P(k+1)+\boxed{}P(k)$．

第３講　微分・積分

1

[1]　次の □ に適する数または式を求めよ．

xy 平面上において，放物線 $C：y=x^2+1$ 上の２点 $\mathrm{P}(p,\ p^2+1)$ $(p>0)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2+1)$ $(q<0)$ における放物線 C の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，l_1 と l_2 の交点 R が x 軸上にあるとする．このとき，接線 l_1 の方程式は $y=$ □ であり，q は p を用いて $q=$ □ と表され，R の x 座標は p を用いて □ と表される．また，放物線 C と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積を S とすると，p を用いて $S=$ □ であり，この面積 S を最小にする p の値は □ であり，S の最小値は □ である．

[2]　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

a を実数の定数として，放物線 $C：y=-2x^2+4ax-a^2-4a+10$ を考える．

(1)　$a=\dfrac{2}{3}$ のとき，放物線 C の頂点の座標は $\left(\dfrac{\square}{\square},\ \dfrac{\square\square}{\square}\right)$ である．

(2)　放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積は，$a=$ □ のとき最小値 $\square\sqrt{\square}$ をとる．

2　Oを原点とする座標平面において，3次関数 $y=x^3-3x$ のグラフを C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3-3a)$ を通り，傾き k の直線を l とする．ただし，a は $a>1$ を満たす定数である．

以下の問いに答えよ．

(1)　C と l が相異なる3点で交わるための k の条件を求めよ．

(2)　C と l が相異なる3点で交わり，さらにP以外の交点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$（ただし $x_1<x_2$）の x 座標 x_1，x_2 がともに負になるような k の値の範囲を求めよ．

以下では $a=\sqrt{3}$ とし，k は(2)で求めた範囲を動くものとする．

(3)　△OQRの面積 S を k で表せ．

(4)　S の最大値を求めよ．

3　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

a，b を実数の定数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3+(2a+4)x^2+(8a+b)x+2ab$$

とする．

(1)　関数 $f(x)$ が極値をもつ必要十分条件は

$$b<\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(a^2-\boxed{\text{ウ}}\,a+\boxed{\text{エ}})$$

である．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が相異なる3つの実数解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする．
$\beta=-2a$ となるための必要十分条件は

$$b<-\boxed{\text{オ}}\,a^2+\boxed{\text{カ}}\,a$$

である．このとき，$\alpha^2+\gamma^2=\boxed{\text{キク}}-\boxed{\text{ケ}}\,b$ であり，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるのは $a=\boxed{\text{コ}}$ のときである．

(3)　曲線 $y=f(x)$ と y 軸との交点をAとする．点Aを通る $y=f(x)$ の接線がただ1本となるのは $a=-\boxed{\text{サ}}$ のときである．

第４講　ベクトル，数列

1

［1］　次の □ に適する式または数値を求めよ．

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-2}{2a_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められているとする．

このとき，$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$ とおくと，$b_{n+1}-b_n=$ □ である．これを用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると，$a_n=$ □ である．

次に，数列 $\{c_n\}$ を $c_1=1$，$c_{n+1}=c_n+4b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定めると，一般項は $c_n=$ □ である．数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n を因数分解した式で表すと □ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{S_k}=$ □ である．

［2］　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+n=1770$ となる自然数 n は $n=$ アイ である．

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=204$ となる自然数 n は $n=$ ウ である．

(3)　$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2=6895$ となる自然数 n は $n=$ エオ である．

2　$0<p<1$ を満たす定数 p に対して，△ABC の辺 AB を $p:1-p$ に内分する点を D とする．また，D から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC の交点を E，線分 DE を $p:1-p$ に内分する点を F とし，$\mathrm{DE}=d$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$，$p$ を用いて表せ．

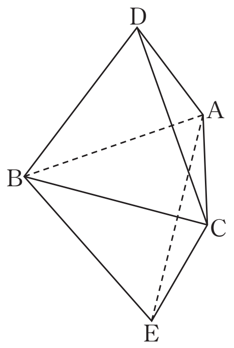
(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を p，d を用いて表せ．

(3)　$g=\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ とする．g を p，d を用いて表せ．

(4)　直線 BE と直線 CF が垂直に交わるとき，直線 AB と直線 CD も垂直に交わることを示せ．

3

右図は，一辺の長さが1の正四面体DABCとEACBを合わせてできる多面体である．



$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とおくとき，次の空欄に当てはまる数を答えよ．

$$\overrightarrow{DE}=\frac{\square}{\square}\vec{a}+\frac{\square}{\square}\vec{b}+\frac{\square}{\square}\vec{c}$$ である．

辺BEを1：2に内分する点をPとすると，

$$\overrightarrow{DP}=\frac{\square}{\square}\vec{a}+\frac{\square}{\square}\vec{b}+\frac{\square}{\square}\vec{c}$$

である．また，辺ACを $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点Qが $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AD}$ を満たすとすると，$t=\dfrac{\square}{\square}$ であって，四面体PABQの体積は $\dfrac{\sqrt{\square}}{\square\square}$ である．

テキスト解答

【講義問題の解答・解説】

第１講　小問集合，三角比と平面図形

1 (1)　$a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ より，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{4}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

よって，$a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=3$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}=3^2-2=7$$

(2)　$\sqrt{n^2-8n+1}=k$ （k は 0 以上の整数）とおくと

$n^2-8n+1=k^2$

$(n-4)^2-16+1=k^2$

$(n-4)^2-k^2=15$　　ゆえに $(n+k-4)(n-k-4)=15$

$n+k-4$，$n-k-4$ は整数であり，$k\geqq 0$ より $n+k-4\geqq n-k-4$ であることから，

$(n+k-4,\ n-k-4)=(15,\ 1),\ (5,\ 3),\ (-3,\ -5),\ (-1,\ -15)$

$(n,\ k)=(12,\ 7),\ (8,\ 1),\ (0,\ 1),\ (-4,\ 7)$

したがって，整数 n の個数は 4 個あり，そのうち最も大きい n は $n=12$ である．

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$，つまり $x^2-4ax+a=0$ の 2 解が α，β であることより，

解と係数の関係から $\alpha+\beta=4a$，$\alpha\beta=a$

2 次方程式 $g(x)=0$，つまり $x^2-bx+c=0$ の 2 解が $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ であることより，

解と係数の関係から $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=b$，$\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}=c$

よって，$b=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{(4a)^2-2a}{a}=16a-2$，　$c=1$

$\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ がともに純虚数のとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ は純虚数または 0 である．

$b=\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ であり，b は実数であることから，$b=0$ である．

よって $16a-2=0$ より，$a=\dfrac{1}{8}$

このとき $f(x)=0$，つまり $x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{8}=0$ の 2 解は $x=\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{1}{4}i$ である．

2 [1] (1)　$\cos x\leqq 0$ のとき，（左辺）>0，（右辺）$\leqq 0$ となり不適．

$\cos x>0$ のとき，両辺正であることから，両辺を 2 乗して

$$\sin^2 x+\frac{1}{2}<\cos^2 x$$

$$\sin^2 x+\frac{1}{2}<1-\sin^2 x$$

$\sin^2 x<\frac{1}{4}$　ゆえに $-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}$

これと $0\leqq x<2\pi$，$\cos x>0$ より　$0\leqq x<\frac{\pi}{6}$，$\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

(2)　$\cos x\cos(\pi-x)=\sin 2x$

$-\cos^2 x=2\sin x\cos x$

$\cos x(2\sin x+\cos x)=0$

$\cos x=0$，または，$2\sin x+\cos x=0$

$\cos x=0$ のとき $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より $\sin x=\pm 1$

$\cos x\neq 0$ のとき $2\sin x+\cos x=0$ より $\tan x=-\frac{1}{2}$

このとき　$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ より $\cos^2 x=\frac{4}{5}$

$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より $\cos x=\frac{2}{\sqrt{5}}$

よって，$\sin x=\tan x\cdot\cos x=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

以上より $\sin x=\pm 1$，$-\frac{1}{\sqrt{5}}$

[2] 真数および底の条件より $x>0$，$x\neq 1$

$\log_2 x=X$ とおくと，$0<x<1$ のとき $X<0$ であり，$x>1$ のとき $X>0$ である.

$\log_2(\sqrt{2}\,x)=\log_2\sqrt{2}+\log_2 x=X+\frac{1}{2}$，　$\log_{\sqrt{x}}8=\frac{\log_2 8}{\log_2\sqrt{x}}=\frac{3}{\frac{1}{2}\log_2 x}=\frac{6}{X}$

(i)より $\left(X+\frac{1}{2}\right)-\frac{6}{X}+2>0$　　よって $X+\frac{5}{2}-\frac{6}{X}>0$ ……①

$0<x<1$ のとき

①の両辺に $X(<0)$ をかけて　$X^2+\frac{5}{2}X-6<0$

$2X^2+5X-12<0$　　$(2X-3)(X+4)<0$　　よって $-4<X<\frac{3}{2}$

$X<0$ より $-4<X<0$　　$\log_2\frac{1}{16}<\log_2 x<\log_2 1$　　したがって $\frac{1}{16}<x<1$

$x>1$ のとき

①の両辺に $X(>0)$ をかけて整理すると $(2X-3)(X+4)>0$　　よって

$X<-4$，$\frac{3}{2}<X$

$X>0$ より $X>\frac{3}{2}$　　$\log_2 x>\log_2 2\sqrt{2}$　　したがって $x>2\sqrt{2}$

3 [1] (1)　AE＝AF＝x，BD＝BF＝y，CD＝CE＝z とおくと

$x+y=9$ …… ①，　$y+z=7$ …… ②，　$z+x=8$ …… ③

①，②，③を辺々加えて $2(x+y+z)=24$　　$x+y+z=12$ …… ④

②と④より $x=5$　　③と④より $y=4$　　①と④より $z=3$

したがって，AE＝5

(2)　△ABC で余弦定理より

$$\cos A=\frac{9^2+8^2-7^2}{2\cdot 9\cdot 8}=\frac{96}{2\cdot 9\cdot 8}=\frac{2}{3}$$

△AEF で余弦定理より

$$\mathrm{EF}^2=5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{2}{3}=50-\frac{100}{3}=\frac{50}{3}\qquad \text{ゆえに EF}=\sqrt{\frac{50}{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

(3)　△ABC で余弦定理より

$$\cos B=\frac{9^2+7^2-8^2}{2\cdot 9\cdot 7}=\frac{66}{2\cdot 9\cdot 7}=\frac{11}{21}$$

△ABD で余弦定理より

$$\mathrm{AD}^2=9^2+4^2-2\cdot 9\cdot 4\cdot\frac{11}{21}=97-\frac{264}{7}=\frac{415}{7}\qquad \text{ゆえに AD}=\sqrt{\frac{415}{7}}$$

[2] △ABC で余弦定理より

$$\mathrm{BC}^2=6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{1}{5}=136-24=112\qquad \mathrm{BC}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$$

$\sin\angle\mathrm{A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ より，

$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=12\sqrt{6}$

また，$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}$ より，$12\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{7}\cdot\mathrm{AH}$　　$\mathrm{AH}=\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{42}}{7}$

△ABH で三平方の定理より

$$\mathrm{BH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{AH}^2=6^2-\left(\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)^2=36\left(1-\frac{6}{7}\right)=\frac{36}{7}$$

方べきの定理より BP・BA＝BH²　　$6\mathrm{BP}=\frac{36}{7}$　　$\mathrm{BP}=\frac{6}{7}$

よって，$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}-\mathrm{BP}=6-\frac{6}{7}=\frac{36}{7}$

また，△AQH∽△AHC より $\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}}$

したがって $\mathrm{AQ}=\frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{AC}}=\frac{36\cdot 6}{7}\times\frac{1}{10}=\frac{108}{35}$

第２講　場合の数と確率

[1] (1)　p_1 は，6 枚の硬貨から表の状態の硬貨を選び，その硬貨を投げて裏が出る確率である．

よって　$p_1=\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

p_2 は，(i) 6 枚の硬貨から表の状態の硬貨を 2 枚選び，その 2 枚の硬貨を投げて表が 1 枚，裏が 1 枚出る，または，(ii) 6 枚の硬貨から表の状態の硬貨を 1 枚，裏の状態の硬貨を 1 枚選び，その 2 枚の硬貨を投げて，両方とも裏が出る確率である．

よって　$p_2=\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times{}_2C_1\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{{}_4C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_2}\times\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{1}{3}$

p_6 は，6 枚の硬貨をすべて選び，その 6 枚の硬貨を投げて表が 3 枚，裏が 3 枚出る確率である．よって　$p_6={}_6C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{20}{2^6}=\dfrac{5}{16}$

(2)　1 から $3n$ までの自然数を，次の A，B，C の 3 つの集合に分類する．

$\mathrm{A}=\{1,\ 4,\ 7,\ \cdots\cdots,\ 3n-2\}$，$\mathrm{B}=\{2,\ 5,\ 8,\ \cdots\cdots,\ 3n-1\}$，$\mathrm{C}=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdots,\ 3n\}$

$a+b+c$ が 3 の倍数となるのは，

a，b，c がすべて A，すべて B，すべて C に属する場合

a，b，c が A，B，C の異なる 3 つの集合に 1 つずつ属する場合

のいずれかである．よって，求める確率は

$$\frac{n}{3n}\cdot\frac{n-1}{3n-1}\cdot\frac{n-2}{3n-2}\times3+\frac{n}{3n}\cdot\frac{n}{3n-1}\cdot\frac{n}{3n-2}\times3!$$

$$=\frac{3n(n-1)(n-2)+6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)+2n^2}{(3n-1)(3n-2)}$$

$$=\frac{3n^2-3n+2}{(3n-1)(3n-2)}$$

(3)　$a_1-a_2\geqq2$ かつ $a_2-a_3\geqq1$ となるのは

$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(6,\ 4,\ 3)$，$(6,\ 4,\ 2)$，$(6,\ 4,\ 1)$，$(6,\ 3,\ 2)$，$(6,\ 3,\ 1)$，
$(6,\ 2,\ 1)$，$(5,\ 3,\ 2)$，$(5,\ 3,\ 1)$，$(5,\ 2,\ 1)$，$(4,\ 2,\ 1)$ の 10 通り．

よって，求める確率は $\dfrac{10}{6^3}=\dfrac{5}{108}$

[2] (1)　9 個の区別のつく玉を，3 つの区別のつく袋に 3 個ずつ入れる場合の数で，

${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3=84\cdot20\cdot1=1680$ (通り)

(2)　(i)　9 個の区別のつく玉を，3 つの区別のつかない袋に 3 個ずつ入れる場合の数で，

(1)より $\dfrac{1680}{3!}=280$ (通り)

(ii)　9 個の区別のつく玉を，3 つの区別のつかない袋に 2 個，2 個，5 個ずつ入れる場合の数で，$\dfrac{{}_9C_2\cdot{}_7C_2\cdot{}_5C_5}{2!}=\dfrac{36\cdot21\cdot1}{2}=378$ (通り)

(iii)　どの袋にも2個以上の玉が入るとき，3つの袋の玉の個数の組合せは

(3，3，3)，(2，2，5)，(2，3，4) である．

9個の区別のつく玉を，3つの区別のつかない袋に2個，3個，4個ずつ入れる場合の数は，${}_9C_2 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_4C_4 = 36 \cdot 35 \cdot 1 = 1260$（通り）

これと(i)，(ii)より，求める場合の数は $378 + 1260 + 280 = 1918$（通り）

(3)　奇数が書かれた玉が入っている袋を選ぶ事象を A，偶数が書かれた玉が入っている袋を選ぶ事象を B，取り出した玉に書かれている自然数の和が3の倍数である事象を C とする．

(i)　求める確率は $P(A \cap C)$ であり，$A \cap C$ が起こるのは，玉に書かれた数の組合せが (1，5)，(3，9)，(5，7) の3通りのとき

よって，求める確率は $P(A \cap C) = P(A) \cdot P_A(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{{}_5C_2} = \dfrac{3}{20}$

(ii)　$B \cap C$ が起こるのは，玉に書かれた数の組合せが (2，4)，(4，8) の2通りのとき

よって，$P(B \cap C) = P(B) \cdot P_B(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{{}_4C_2} = \dfrac{1}{6}$

したがって，$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = \dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{19}{60}$ より，求める確率は

$P_C(A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{3}{20} \cdot \dfrac{60}{19} = \dfrac{9}{19}$

3　番号1，2，3，……，k の箱に入れた玉をそれぞれ a_1，a_2，a_3，……，a_k とする．

$k=3$ のとき，条件を満たすのは $(a_1,\ a_2,\ a_3) = (2,\ 3,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 2)$ の2通り

よって，$N(3)=2$，$P(3) = \dfrac{N(3)}{3!} = \dfrac{2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{1}{3}$

$k=4$ のとき，条件を満たすのは

$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = (2,\ 1,\ 4,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 4,\ 1)$，$(2,\ 4,\ 1,\ 3)$，
$(3,\ 1,\ 4,\ 2)$，$(3,\ 4,\ 1,\ 2)$，$(3,\ 4,\ 2,\ 1)$，
$(4,\ 1,\ 2,\ 3)$，$(4,\ 3,\ 1,\ 2)$，$(4,\ 3,\ 2,\ 1)$ の9通り

よって，$N(4)=9$

$k=5$ のとき，条件を満たす $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ について考える．

$a_1=2$ とし，以下，番号2，3，4，5の箱に番号1，3，4，5の玉を，条件を満たすように入れる場合を考える．

$a_2=1$ のとき　番号3，4，5の箱に番号3，4，5の玉を入れる場合で，

それは番号1，2，3の箱に番号1，2，3の玉を入れる場合と同じである．

よって，$N(3)$ 通り

$a_2 \neq 1$ のとき　番号2の箱に番号1の玉が入らない場合で，

それは番号1，2，3，4の箱に番号1，2，3，4の玉を入れる場合と同じである．

よって，$N(4)$ 通り

よって，$a_1=2$ のとき，条件を満たすのは $N(3)+N(4)$ 通りある．

$a_1=3$，4，5 の場合も同様である．

したがって，$N(5)=4\times(N(4)+N(3))$

一般の k のとき，$N(k+2)$ を考える．

$a_1=2$ とする．

$a_2=1$ のとき，番号 3，4，……，$k+2$ の k 個の箱に番号 3，4，……，$k+2$ の k 個の玉を条件を満たすように入れる場合で，$N(k)$ 通り

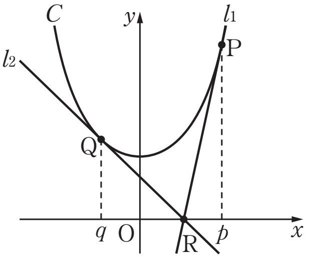
$a_2\neq1$ のとき，番号 2，3，……，$k+2$ の $k+1$ 個の箱に番号 2，3，……，$k+2$ の $k+1$ 個の玉を条件を満たすように入れる場合で，$N(k+1)$ 通り

$a_1=3$，4，……，$k+2$ の場合も同様である．

よって，$N(k+2)=(k+1)\times(N(k)+N(k+1))$

したがって，
$$P(k+2)=\frac{N(k+2)}{(k+2)!}=(k+1)\times\left(\frac{N(k)}{(k+2)!}+\frac{N(k+1)}{(k+2)!}\right)$$
$$=\frac{1}{k+2}\cdot\frac{N(k)}{k!}+\frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{N(k+1)}{(k+1)!}$$
$$=\frac{k+1}{k+2}P(k+1)+\frac{1}{k+2}P(k)$$

第３講　微分・積分



1 ［1］ $C: y=x^2+1$ より $y'=2x$

よって，点 $(t,\ t^2+1)$ における C の接線の方程式は

$y=2t(x-t)+(t^2+1)$　つまり $y=2tx-t^2+1$

よって，$l_1: y=2px-p^2+1$，$l_2: y=2qx-q^2+1$

$2px-p^2+1=2qx-q^2+1$ より

$2(p-q)x=p^2-q^2$

よって，点Rの x 座標は $x=\dfrac{p+q}{2}$ であり，

y 座標は $y=2p\cdot\dfrac{p+q}{2}-p^2+1=pq+1$ である．

点Rは x 軸上にあることから，$pq+1=0$　よって $q=-\dfrac{1}{p}$

$r=\dfrac{p+q}{2}$ とおくと，放物線 C と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_q^r\{(x^2+1)-(2qx-q^2+1)\}\,dx+\int_r^p\{(x^2+1)-(2px-p^2+1)\}\,dx$$

$$=\int_q^r(x-q)^2\,dx+\int_r^p(x-p)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-q)^3\right]_q^r+\left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_r^p$$

$$=\frac{1}{3}(r-q)^3-\frac{1}{3}(r-p)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{q-p}{2}\right)^3=\frac{1}{24}(p-q)^3+\frac{1}{24}(p-q)^3=\frac{1}{12}(p-q)^3$$

$$=\frac{1}{12}\left(p+\frac{1}{p}\right)^3$$

$p>0$ より，相加平均≧相乗平均から

$p+\dfrac{1}{p}\geqq 2\sqrt{p\cdot\dfrac{1}{p}}=2$　　等号成立は $p=\dfrac{1}{p}$　つまり $p=1$ のとき

よって S を最小にする p の値は $p=1$ であり，このとき最小値は $\dfrac{1}{12}\cdot 2^3=\dfrac{2}{3}$ である．

［2］ $y=-2x^2+4ax-a^2-4a+10=-2(x-a)^2+a^2-4a+10$

よって，放物線 C の頂点の座標は $(a,\ a^2-4a+10)$ である．

(1)　$a=\dfrac{2}{3}$ のとき，放物線 C の頂点の座標は $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{70}{9}\right)$

(2)　放物線 C は上に凸であり，頂点の y 座標は $a^2-4a+10=(a-2)^2+6>0$

よって，放物線 C は x 軸と異なる２点で交わり，その交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，α，β は２次方程式 $-2x^2+4ax-a^2-4a+10=0$ の２解である．

解と係数の関係より $\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=\dfrac{a^2+4a-10}{2}$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(2a)^2-4\cdot\frac{a^2+4a-10}{2}=2a^2-8a+20$$

放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta(-2x^2+4ax-a^2-4a+10)\,dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(2a^2-8a+20)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\{2(a-2)^2+12\}^{\frac{3}{2}}$$

したがって，S は $a=2$ のとき最小値 $\frac{1}{3}\cdot 12^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\cdot 12\sqrt{12}=8\sqrt{3}$ をとる．

2 (1)　直線 l の方程式は $y=k(x-a)+a^3-3a$ つまり $y=kx+a^3-3a-ak$

$x^3-3x=kx+a^3-3a-ak$

$x^3-(k+3)x-a^3+3a+ak=0$

$(x-a)(x^2+ax+a^2-k-3)=0$

よって，C と l が異なる３点で交わるのは，$x^2+ax+a^2-k-3=0$ が a 以外の異なる２つの実数解をもつときである．

よって，判別式 $a^2-4\cdot1\cdot(a^2-k-3)>0$ かつ $a^2+a^2+a^2-k-3\neq0$

したがって，求める k の条件は $k>\frac{3}{4}a^2-3$ かつ $k\neq3a^2-3$

(2)　C と l が相異なる３点で交わり，さらにＰ以外の交点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$ の x 座標 x_1，x_2 がともに負になるのは，$x^2+ax+a^2-k-3=0$ が異なる２つの負の解をもつときである．

$f(x)=x^2+ax+a^2-k-3$ とおくと，$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2-k-3$

$f(0)>0$ より $a^2-k-3>0$　　よって　$k<a^2-3$

$\frac{3}{4}a^2-k-3<0$ より $k>\frac{3}{4}a^2-3$

$-\frac{a}{2}<0$ より $a>0$（$a>1$ より満たす）

以上より $\frac{3}{4}a^2-3<k<a^2-3$

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき $-\frac{3}{4}<k<0$

$x^2+\sqrt{3}x-k=0$ の２解が x_1，x_2（$x_1<x_2$）より，解と係数の関係から

$x_1+x_2=-\sqrt{3}$，$x_1x_2=-k$

また，直線 l の方程式は $y=kx-\sqrt{3}k$

よって，△OQR の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{1}{2}\left|x_1\left(kx_2-\sqrt{3}k\right)-x_2\left(kx_1-\sqrt{3}k\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\,k(x_2-x_1)\right|=-\frac{\sqrt{3}}{2}k(x_2-x_1)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}k\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}k\sqrt{4k+3}$$

(4)　$k<0$ より $S=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-k)\sqrt{4k+3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-k)^2(4k+3)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4k^3+3k^2}$

$g(k)=4k^3+3k^2$ とおくと $g'(k)=12k^2+6k=6k(2k+1)$

よって，右の増減表より S の最大値は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{g\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

k	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0
$g'(k)$		$+$	0	$-$	
$g(k)$		↗	$\frac{1}{4}$	↘	

3　(1)　$f(x)=x^3+(2a+4)x^2+(8a+b)x+2ab$ より $f'(x)=3x^2+2(2a+4)x+8a+b$

3 次関数 $f(x)$ が極値をもつ必要十分条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであり，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると $D>0$ である．

$\frac{D}{4}=(2a+4)^2-3(8a+b)>0$　よって，求める必要十分条件は $b<\frac{4}{3}(a^2-2a+4)$

(2)　$f(-2a)=(-2a)^3+(2a+4)\cdot(-2a)^2+(8a+b)\cdot(-2a)+2ab=0$ より，

$-2a$ は $f(x)=0$ の解の 1 つである．

$f(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもち，$\beta=-2a$ となるのは，

$-2a$ が $f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解のうち 2 番目に大きい解のときであり，

それは $-2a$ が，$f(x)$ が極値をとるときの 2 つの x 座標の間にあることである．

よって，$f'(-2a)<0$ より $3\cdot(-2a)^2+2(2a+4)\cdot(-2a)+8a+b<0$

したがって，求める必要十分条件は $b<-4a^2+8a$

また，$f(x)=(x+2a)(x^2+4x+b)$ と因数分解できるので，α，γ は 2 次方程式

$x^2+4x+b=0$ の異なる 2 つの実数解である．

解と係数の関係より，$\alpha+\gamma=-4$，$\alpha\gamma=b$

よって，$\alpha^2+\gamma^2=(\alpha+\gamma)^2-2\alpha\gamma=(-4)^2-2b=16-2b$

次に，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるのは

$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=-\int_\beta^\gamma f(x)\,dx$ つまり $\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=0$ のとき

すなわち $\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(x+2a)(x-\gamma)\,dx=0$ のときである．

ここで，$(x-\alpha)(x+2a)(x-\gamma)=x(x-\alpha)(x-\gamma)+2a(x-\alpha)(x-\gamma)$ であり，

$$\int_\alpha^\gamma x(x-\alpha)(x-\gamma)\,dx=\int_\alpha^\gamma\{x^3-(\alpha+\gamma)x^2+\alpha\gamma x\}\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\gamma}{3}x^3+\frac{\alpha\gamma}{2}x^2\right]_\alpha^\gamma$$

$$=\frac{\gamma^4-\alpha^4}{4}-\frac{\alpha+\gamma}{3}(\gamma^3-\alpha^3)+\frac{\alpha\gamma}{2}(\gamma^2-\alpha^2)$$

$$=\frac{1}{4}(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2-\alpha^2)-\frac{(\gamma+\alpha)}{3}(\gamma-\alpha)(\gamma^2+\gamma a+\alpha^2)+\frac{\alpha\gamma(\gamma^2-\alpha^2)}{2}$$

$$=\frac{1}{12}(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)\{3(\gamma^2+\alpha^2)-4(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)+6\alpha\gamma\}$$

$$=\frac{1}{12}(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)(-\gamma^2+2\gamma\alpha-\alpha^2)=-\frac{1}{12}(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)^3$$

$$\int_\alpha^\gamma 2a(x-\alpha)(x-\gamma)\,dx=2a\times\left\{-\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3\right\}=-\frac{a}{3}(\gamma-\alpha)^3$$

であることより，

$$-\frac{1}{12}(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)^3-\frac{a}{3}(\gamma-\alpha)^3=0$$

$\gamma\neq\alpha$ より $-\dfrac{1}{12}(\gamma+\alpha)-\dfrac{a}{3}=0$　　これと $\alpha+\gamma=-4$ より $a=1$

(3)　曲線 $y=f(x)$ の $x=t$ における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

これが点 A$(0,\ 2ab)$ を通るとき，

$$2ab=-f'(t)t+f(t)$$

$$=-\{3t^2+2(2a+4)t+(8a+b)\}t+t^3+(2a+4)t^2+(8a+b)t+2ab$$

$t^3+(a+2)t^2=0$　　よって $t=0,\ -a-2$

点 A を通る接線がただ１本のとき，接点はただ１つ．

したがって，$-a-2=0$ より $a=-2$

第４講　ベクトル，数列

1 ［1］ $b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$ のとき

$$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{\dfrac{3a_n-2}{2a_n-1}-1}=\frac{2a_n-1}{a_n-1}=2+\frac{1}{a_n-1}=b_n+2$$

$b_{n+1}-b_n=2$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{1}{a_1-1}=2$，公差 2 の等差数列

よって，$b_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$ より $\dfrac{1}{a_n-1}=2n$ 　　よって $a_n=\dfrac{1}{2n}+1$

$c_{n+1}-c_n=4b_n=8n$ より，$n\geqq 2$ のとき

$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}8k=1+8\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=4n^2-4n+1 \quad (n=1 \text{ のときも成立})$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+1\cdot n$$

$$=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{S_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{3}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$$

$$=\frac{30}{21}=\frac{10}{7}$$

［2］(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+n=1770$ より $\dfrac{1}{2}n(n+1)=1770$ 　　$n(n+1)=3540$

$59\cdot 60=3540$ であり，n が自然数のとき $n(n+1)$ は単調増加.

よって $n=59$ に限られる.

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=204$ より

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=204 \qquad n(n+1)(2n+1)=1224$$

$8\cdot 9\cdot 17=1224$ であり，n が自然数のとき $n(n+1)(2n+1)$ は単調増加.

よって，$n=8$ に限られる.

(3)　$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ とおくと，$n\geqq 2$ のとき

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2$$

$$=S_{2n}-S_{n-1}$$

$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{n\{(16n^2+12n+2)-(2n^2-3n+1)\}}{6}$$

$$=\frac{n(14n^2+15n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(14n+1)}{6} \quad (n=1 \text{ のときも成立})$$

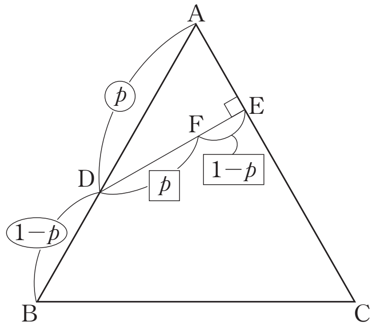
$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2=6895$ より

$\dfrac{n(n+1)(14n+1)}{6}=6895 \qquad n(n+1)(14n+1)=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot197$

$14\cdot15\cdot197=6895$ であり，n が自然数のとき $n(n+1)(14n+1)$ は単調増加．

よって，$n=14$ に限られる．

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{CD}}+p\overrightarrow{\mathrm{CE}}$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\{\overrightarrow{\mathrm{CE}}+(1-p)\overrightarrow{\mathrm{ED}}\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}-(1-p)|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$

$=0-(1-p)d^2=-(1-p)d^2$

(3) $g=\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$=(\overrightarrow{\mathrm{CF}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$=p\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\left(-\dfrac{1-p}{p}\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right)$

$=-(1-p)\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=-(1-p)\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}})$

$=-(1-p)(|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EA}})=-(1-p)(d^2+0)=-(1-p)d^2$

(4) $\mathrm{BE}\perp\mathrm{CF}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{DE}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{1-p}\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\overrightarrow{\mathrm{FD}})$

$=\dfrac{1}{1-p}(\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FD}})$

$=\dfrac{1}{1-p}(\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}-\overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}})$

(2)，(3)より $\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=-(1-p)d^2$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より $\mathrm{AB}\perp\mathrm{CD}$

3 合同な正四面体 DABC と正四面体 EACB において，点 D から面 ABC に下ろした垂線の足と点 E から △ABC に下ろした垂線の足は，ともに正三角形 ABC の重心で一致する．

この重心を G とすると

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=2\overrightarrow{\mathrm{DG}}=2\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{DA}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{DQ}}-\overrightarrow{\mathrm{DP}})\cdot\vec{a}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\vec{a}$

$$\{(1-t)\vec{a}+t\vec{c}\}\cdot\vec{a}=\left(\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{8}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$$

$$(1-t)|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{2}{9}|\vec{a}|^2+\frac{8}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ より

$1-\dfrac{1}{2}t=\dfrac{7}{9}$　　よって $t=\dfrac{4}{9}$

このとき AQ：QC＝4：5

四面体EABC の高さを h とすると

$$h^2=|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{DG}}|^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1^2+1^2+1^2+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times6$$　　よって $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

したがって，四面体PABQ の体積を V とすると

$$V=\triangle\mathrm{ABQ}\times(\text{点 P から }\triangle\mathrm{ABQ}\text{ に下ろした垂線の長さ})\times\frac{1}{3}$$

$$=\left(\frac{4}{9}\triangle\mathrm{ABC}\right)\times\frac{1}{3}h\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin 60^\circ\times\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{81}$$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。